NEXUS : ARTICULER PRATIQUES D'ENSEIGNEMENT ET RECHERCHES
NEXUS: CONNECTING TEACHING PRACTICE AND RESEARCH

Narration et analyse, sous le prisme de la logique, d'un débat mathématique vécu en formation d'enseignants

Daniel Zimmer
Université catholique de Louvain
CRIPEDIS

Résumé

La pratique du débat scientifique en classe de mathématiques reste assez minoritaire, pourtant il s'agit d'un outil permettant de donner du sens aux apprentissages en mathématiques, ouvrant les élèves ou étudiant·es à une véritable démarche mathématicienne. Après un bref rappel théorique à propos du dispositif de débat scientifique en classe de mathématiques, nous racontons le déroulement d'un débat vécu dans une classe de futur·es enseignant·es du secondaire. Le débat présenté avait pour sujet un problème de géométrie de l'espace. Nous analysons différents arguments proposés par les participant·es, du point de vue de leur contenu logique, montrant l'intérêt du débat pour la mise en action de la logique mathématique.

Mots-clefs : débat scientifique, logique, géométrie de l'espace, pratique de classe, implication

Introduction

Nous présentons et analysons dans cet article un « débat mathématique » vécu en formation d'enseignants dans une classe d'agrégation de l'enseignement secondaire supérieur (AESS) en Belgique[1]. Après un bref cadrage théorique à propos des débats scientifiques en cours de mathématiques, nous présentons l'énoncé du problème débattu, suivi de la narration des échanges survenus lors de son expérimentation en classe. Enfin, nous analysons, à travers le prisme de la logique mathématique, plusieurs des arguments proposés par les étudiant·es. La pratique du débat mathématique en classe est minoritaire à l'heure actuelle en Belgique, mais nous pensons qu'utilisée à bon escient, elle permet aux élèves ou étudiant·es de donner plus de sens à leurs apprentissages en mathématiques.

1. Cadrage théorique

Comme le soulignait déjà Guy Brousseau dans son texte fondateur (1986), un apprentissage fructueux des mathématiques doit passer par l'entrée active de l'élève, à son échelle, dans une véritable démarche scientifique, c'est-à-dire « qu'il agisse, qu'il formule, qu'il prouve, qu'il construise des modèles, des langages, des concepts, des théories, qu'il les échange avec d'autres, qu'il reconnaisse celles qui sont conformes à la culture, qu'il lui emprunte celles qui lui sont utiles, etc. » (p. 37). Nous pensons que l'activité de débat en classe est particulièrement adaptée à la poursuite de ces objectifs. Cette activité consiste à proposer une question ouverte à caractère mathématique à la classe et à la mettre en discussion au sein de celle-ci, à la mettre en débat. En particulier, le but est que les apprenant·es se parlent entre eux, que l'enseignant·e ne soit plus un interlocuteur privilégié à qui on expose ses arguments en attendant une validation, mais seulement un médiateur, un facilitateur des échanges entre apprenants. L'enseignant·e se doit donc de faire un pas de côté et de laisser les apprenant·es s'approprier le problème. Il ou elle veille toutefois au bon déroulement des échanges, en s'assurant par exemple que les arguments de chaque apprenant·e soient entendus et que la discussion ne dévie pas trop de la question étudiée. L'objectif du débat est de laisser les apprenant·es formuler des conjectures et les mettre en discussion, proposer des contre-exemples pour invalider celles-ci ou, au contraire, des arguments (plus ou moins solides) pour les étayer, et aller éventuellement jusqu'à en construire une démonstration. Comme le met en évidence Marc Legrand (1993), pendant le débat, la classe constitue une communauté scientifique miniature, et c'est cette communauté qui

---

1 L'enseignement secondaire supérieur en Belgique comprend les trois dernières années d'enseignement secondaire, l'équivalent du lycée en France. L'agrégation de l'enseignement secondaire supérieur (AESS) est le diplôme requis pour enseigner à ces niveaux. Les futur·es enseignant·es qui participent à ce débat sont donc destiné·es à enseigner les mathématiques à des élèves entre 15 et 18 ans environ.

devient l'interlocuteur de l'étudiant·e qui prend la parole, et non plus l'enseignant·e comme c'est classiquement le cas dans un cours habituel. Cette différence est cruciale, en effet :

> […] c'est un interlocuteur qui, en un certain sens, peut exiger plus que le professeur lui-même. En particulier, l'élève accepte plus facilement l'exigence de produire des contre-exemples précis, de fournir des arguments reconnus de tous (y compris d'expliciter les théorèmes sur lesquels son argumentation repose), si cette demande vient de personnes qui réclament des arguments pour être intimement persuadées et comprendre, que si c'est l'exigence du professeur (l'élève sait que le professeur sait !). […] Par contre, si le professeur est un interlocuteur possible, il devient à lui seul l'interlocuteur suffisant ; dans ce cas, le travail de changement de point de vue et d'approfondissement nécessaire pour atteindre les pairs devient superfétatoire et tend à disparaître […] (Legrand, 1993, p. 127).

Si l'activité de débat présentée ici ne permet pas forcément de travailler un point de matière précis (par exemple, le théorème de Pythagore ou le calcul vectoriel peuvent apparaitre lors de la discussion du problème que nous présentons, mais ce n'est pas garanti), elle permet par contre de pratiquer la recherche mathématique à petite échelle : les participant·es s'interrogent, proposent des idées et s'approprient celles des autres afin de les critiquer de façon constructive. Le débat mathématique en classe permet, sinon de vivre la genèse d'un résultat mathématique, au moins d'en approcher la construction, telle que la décrit Lakatos (1976), *via* la mise à l'épreuve de conjectures, leur réfutation ou, éventuellement après amélioration, leur validation. Ce genre de compétence est habituellement peu travaillé en cours de mathématiques, où on enjoint souvent à l'apprenant·e, soit de démontrer un énoncé supposé vrai car annoncé comme tel par l'enseignant·e, qui a le monopole de la responsabilité scientifique, soit de montrer son invalidité, mais rarement de se positionner personnellement par rapport à la vérité d'une affirmation. Il s'agit bien sûr ensuite d'appliquer les résultats théoriques, d'effectuer des calculs, mais rarement de se positionner comme acteur·rice dans la formulation des théories mathématiques et de s'interroger sur leur valeur de vérité en dehors du contexte scolaire.

Le débat n'est bien sûr pas la seule activité permettant ce genre de questionnement, par exemple une simple série de questions « vrai ou faux » invite les apprenant·es à se positionner par rapport à la vérité d'énoncés mathématiques. Cependant, le débat est une activité particulièrement riche et, en particulier, les conjectures à valider ou invalider sont ici proposées *par les apprenant·es* et non par l'enseignant·e, qui ne fournit que le contexte dans lequel conjecturer. Ceci est une différence majeure, comme mis en évidence dans la citation de Legrand plus haut. On pourrait même imaginer débattre à partir d'une question proposée par les apprenant·es ; c'est en fait un des buts de la pratique du débat : rendre disponible en classe un dispositif permettant à l'enseignant·e, lorsque cela s'y prête, de retourner à l'ensemble de la communauté classe une question d'un·e de ses membres.

2. Narration de l'activité

2.1 Contexte, énoncé du problème et analyse *a priori*

L'activité que nous présentons ci-dessous était proposée aux étudiant·es dans le but d'illustrer la section du cours consacrée à la pratique du débat en classe de mathématiques. Il s'agissait donc *a priori* d'un premier contact avec cette pratique pour ces étudiant·es, qui avaient cependant eu l'occasion de se côtoyer pendant plusieurs semaines déjà. Ces étudiant·es sont issu·es, pour la plupart, soit du cursus de mathématiques pures à l'université, soit d'études d'ingénieur, et ont donc des bases assez solides en mathématiques. Observons que ceci n'est pas un prérequis à la pratique du débat, cependant le niveau mathématique des participant·es a assurément un impact sur la nature des conjectures et arguments échangés. Ajoutons que l'enseignante a l'habitude d'animer des débats dans divers contextes de formation d'enseignants (Gilbert, 2020, 2021).

Pendant le cours qui a précédé l'activité de débat, l'enseignante a donné quelques règles générales à respecter pour que la séance reste constructive : par exemple, s'adresser au groupe et non à l'enseignante lorsqu'on prend la parole, s'assurer de bien écouter celui ou celle qui prend la parole, réagir avec franchise mais respect, s'interdire les arguments d'autorité, etc. (Gilbert, 2020). Ces règles du débat sont librement inspirées de Legrand (2017).

L'activité de débat que nous présentons ici est rythmée par deux temps forts successifs : une phase de formulation de conjectures, puis une phase de débat proprement dit. Tout d'abord, après un bref temps de réflexion, les apprenant·es sont invité·es à proposer des énoncés raisonnables en lien avec le problème. À ce moment-là, on n'est pas encore dans une démarche d'argumentation : on ne fait que proposer des idées sans donner d'arguments pour ou contre. Ensuite, une fois la récolte des propositions terminée, on met celles-ci en débat pour que chacun·e puisse avancer ses arguments : le but est alors d'échanger pour se convaincre et convaincre les autres que tel résultat proposé par soi ou un·e autre est vrai ou non.

Nous présentons à présent la question du débat, qui est un énoncé original élaboré par l'enseignante au sein du groupe de travail sur les débats en classe de mathématiques du Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM), à partir d'un problème de géométrie du type « prouvez que… » remanié en une question ouverte.

> La figure 1 ci-dessous représente un cube. Le point X est situé sur l'arête $[GD]$ et le point Y sur $[AB]$.
> Conjecturez à propos de la nature du triangle XYZ.

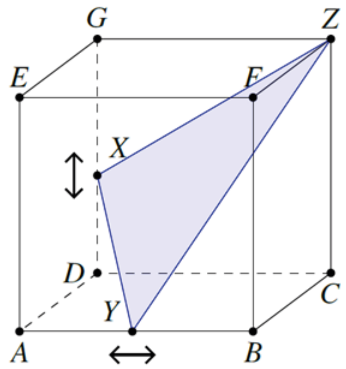

Figure 1. *Reproduction de la figure présentée en introduction du problème*

L'énumération de toutes les configurations particulières possibles est relativement longue et n'est pas ce qui nous intéresse dans le cadre de cet article ; à notre sens, ce qui assure que l'énoncé fonctionne bien pour provoquer des débats en classe est la combinaison d'une ouverture assez large en termes de variété des conjectures possibles d'une part avec, d'autre part, l'insuffisance de l'intuition seule à trancher de prime abord avec certitude concernant la validité de celles-ci. Le fait qu'il s'agisse d'un problème de géométrie dans l'espace n'est pas anodin : les effets de trompe-l'œil et la difficulté de bien appréhender les angles et les distances représentées en 2D empêche de « voir » directement si, dans une configuration donnée, le triangle est rectangle, isocèle, ou autre.

Les certitudes demandent un peu de travail, mais le problème reste assez concret et les participant·es peuvent aisément obtenir une intuition et proposer des conjectures, vraies ou fausses ; autrement dit, il est relativement facile de s'engager dans le problème, mais les arguments pour justifier ses prises de position ne sont pas immédiats, ce qui garantit un certain tâtonnement et donc une certaine richesse d'échanges.

On s'attend à ce qu'un point d'attention particulier soit la détermination des cas où le triangle est rectangle. Cette question est délicate dans la mesure où, lorsque $Y = A$, plusieurs arguments naïfs simples mais convaincants peuvent justifier que le triangle sera toujours rectangle, ce qui n'est en réalité pas vrai. Nos expérimentations montrent en fait qu'il y a un réel obstacle chez les élèves/étudiant·es concernant le lien entre plans perpendiculaires et droites perpendiculaires.

Une analyse détaillée d'une version légèrement plus simple du problème, où l'on autorise seulement au point X de se déplacer et où le point Y est fixé en A, se trouve dans Zimmer *et al.* (2022). Notons que cette version simplifiée du problème a été expérimentée dans plusieurs classes de l'enseignement secondaire supérieur ; l'article cité rend compte de ces expérimentations et développe entre autres la question du lien entre plans perpendiculaires et droites perpendiculaires.

Nous présentons à présent le déroulement de la séance suite à la présentation de l'énoncé. Les propos des étudiant·es ont été recueillis par l'auteur, qui participait à la séance en tant qu'observateur.

2.2. Temps de réflexion personnelle

Les étudiant·es disposent d'abord de 2 minutes pour réfléchir seul·es au problème, afin de s'approprier l'énoncé, de poser éventuellement une question de clarification à l'enseignante et de commencer à chercher.

2.3. Phase de débat privé

Chacun·e peut ensuite en discuter pendant 2 minutes avec son ou sa voisin·e direct·e, c'est la phase dite de « débat privé »[2].

2.4. Formulation des conjectures

Les étudiant·es sont invité·es à formuler leurs conjectures, que l'enseignante, animatrice du débat, écrit alors au tableau. Au début, certain·es étudiant·es ne peuvent s'empêcher de réagir : « Ah non, ça, c'est faux », mais l'animatrice intervient pour rappeler qu'on ne fait à cette étape que formuler les conjectures, sans s'autoriser à discuter de leur validité. Ceci pour permettre aux participant·es d'avancer leurs propositions sans trop de pression : ce n'est pas grave si on propose quelque chose de faux, c'est même parfois d'autant plus intéressant. Cette phase dure une dizaine de minutes.

Les conjectures proposées par les étudiant·es sont les suivantes[3].

1. Si $X = D$ et $Y = B$, alors le triangle XYZ est isocèle.
2. Si $X = D$ et $Y = B$, alors le triangle XYZ est équilatéral.
3. Si $X = D$ et $Y = B$, alors le triangle XYZ est rectangle.
4. Si $X = D$ et $Y = A$, alors le triangle XYZ est rectangle.
5. Si $X = G$ et $Y = B$, alors le triangle XYZ est rectangle.
6. Si $X = G$ et $Y = A$, alors le triangle XYZ est rectangle.
7. Si Y est le milieu du segment $[AB]$ et $X = G$, alors le triangle XYZ est isocèle.
8. Si $Y = A$, alors le triangle XYZ est rectangle.
9. Tous les triangles sont acutangles.

---

2 Nous reprenons ici les notions de débat privé et débat public de Leroux et Lecorre (2007).

3 Observons que, pour faciliter la lecture, les conjectures sont ici légèrement reformulées, sans en altérer le sens. Elles ont en effet été reprises au tableau sous forme plus ou moins abrégée par l'enseignante, en conservant cependant le plus possible le sens des propositions des participant·es. Par exemple, la première était écrite sous la forme « $X = D$ et $Y = B \Rightarrow \Delta$ isocèle ». La question de l'écriture précise des conjectures n'est pas sans importance, comme nous le verrons dans la discussion de la conjecture 8 plus bas.

10. Il n'y a pas de triangle obtusangle.
11. Si X est le milieu du segment $[GD]$ et $Y = A$, alors le triangle XYZ est isocèle.

2.5. Choix des conjectures à discuter

Les étudiant·es sont invité·es à se prononcer sur les conjectures à mettre en débat en priorité ; le temps étant limité, on n'aura pas l'occasion de discuter de toutes. L'enseignante demande donc aux étudiant·es lesquelles leur donnent envie de réagir. Les choix retenus sont : les conjectures 1, 2 et 3, vues comme un ensemble de conjectures liées entre elles, puisqu'elles traitent du même triangle BDZ ; les conjectures 4 et 8, également vues comme liées ; la conjecture 9.

2.6. Phase de débat public, premier acte : les conjectures 1, 2 et 3

L'enseignante laisse les étudiant·es qui se sont prononcé·es à propos du choix des conjectures à mettre en discussion s'exprimer en premier. David[4] entame la discussion avec un argument en faveur de la vérité de la conjecture 2 : « Je pense que si $X = D$ et $Y = B$, alors le triangle est équilatéral, car dans ce cas, les trois côtés du triangle sont des diagonales du cube et, alors, si le cube est bien dessiné[5], ces diagonales ont même longueur et le triangle est bien équilatéral ». Julie fait remarquer que cela infirmerait du même coup la conjecture 3, puisqu'un triangle équilatéral ne peut être rectangle. Entretemps, David passe au tableau pour assoir son argument par un dessin, reproduit à la figure 2.

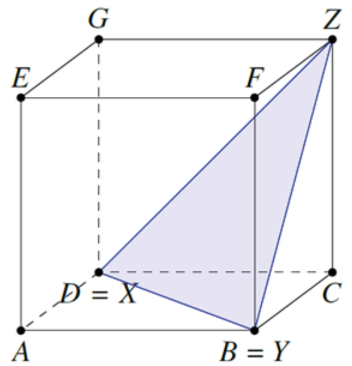

Figure 2. *Dessin de David au tableau pour illustrer son triangle équilatéral*

4 Les prénoms ont été modifiés.

5 Observons que la validité de l'argument ne doit pas dépendre de la précision du dessin, le cube étant un objet géométrique abstrait. De plus, aucun type de représentation en deux dimensions ne permet de conserver toutes les longueurs, tous les rapports de longueurs ou tous les angles.

Abel observe alors une imprécision dans la formulation de son argument : il faut bien prendre garde à distinguer les diagonales d'une face du cube et les diagonales du cube, ces dernières étant les segments reliant des sommets opposés du cube. Dans l'argument de David, les trois côtés du triangle sont bien des diagonales de faces du cube. Laura remarque alors qu'un triangle équilatéral est bien isocèle, donc la validité de la conjecture 2 implique celle de la conjecture 1.

L'animatrice du débat fait alors le point : les conjectures 1 et 2 seraient donc décidées vraies, alors que la 3 serait fausse. Tou·tes les étudiant·es sont d'accord et on passe alors à la suite des discussions.

2.7 Phase de débat public, deuxième acte : les conjectures 4 et 8

2.7.1 La conjecture 4

Amélie pense que la conjecture 4 est vraie (c'est-à-dire que le triangle *ADZ* est rectangle), avec pour argument que les segments [*AD*] et [*DG*] appartiennent à des plans perpendiculaires et sont donc eux aussi perpendiculaires entre eux.

Arthur dit qu'il est d'accord avec la conclusion d'Amélie, mais pas nécessairement avec son raisonnement. Il donnerait plutôt l'argument suivant : le triangle est rectangle, non parce que les plans *ADG* et *DGZ* sont perpendiculaires, mais bien parce que la droite *AD* est perpendiculaire au plan *DGZ*.

Aymeric intervient alors, pour dire qu'il ne voit pas pourquoi l'argument d'Amélie serait moins bon que celui d'Arthur. Il dit qu'il est déjà convaincu par l'argument d'Amélie et ne comprend pas pourquoi Arthur éprouve le besoin de le raffiner. Isabelle remarque alors que « ça marcherait pour le 1, 2, 3 aussi, alors » ! Autrement dit, avec l'argument d'Amélie, on pourrait montrer que le triangle *BDZ* est rectangle, puisque les segments [*BD*] et [*BZ*] appartiennent tous deux à des plans qui se coupent perpendiculairement, or la classe s'est mise d'accord quelques instants auparavant pour dire que le triangle *BDZ* n'était justement pas rectangle, puisqu'il est équilatéral.

La classe est convaincue par le contre-argument d'Isabelle, et on décide que l'argument avancé par Amélie n'est pas valide. La classe est cependant d'accord pour accepter la conjecture 4 comme vraie, sur base de l'argument d'Arthur.

2.7.2 La conjecture 8

L'animatrice propose de commencer le débat sur la conjecture 8 (« Si $Y = A$, alors le triangle *XYZ* est rectangle ») par un vote à main levée, histoire d'encourager tout le monde (même les étudiant·es ne prenant pas facilement la parole) à exprimer une position, quitte à ce que celle-ci soit « Je ne sais pas ». Elle propose trois opinions : « vrai », « faux » ou « autre », cette dernière position devant alors être précisée oralement, par exemple « Je ne sais pas » ou « J'hésite ». Personne ne vote « vrai », onze étudiant·es votent « faux », tandis que quatre votent « autre ». En particulier, David dit que « ça dépend ». Malgré ce vote quasi unanime, le débat prendra quand même – c'est une situation qu'on peut observer régulièrement : même si un vote laisse penser que tout le monde est d'accord, souvent tous·tes n'ont pas les mêmes arguments pour appuyer leur choix.

Établissant un parallèle avec la conjecture 11 (« Si X est le milieu du segment [*GD*] et $Y = A$, alors le triangle *XYZ* est isocèle »), Arthur avance que, si le point *X* se situe au milieu du segment [*DG*], alors le triangle n'est pas rectangle, mais obtusangle, en s'appuyant sur le dessin reproduit à la figure 3 ci-dessous.

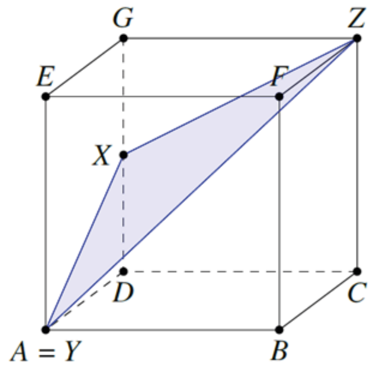

Figure 3. *Dessin d'Arthur pour illustrer son triangle obtusangle*

Son argument est que les longueurs des côtés [*AX*] et [*XZ*] sont les mêmes, alors que celle du côté [*AZ*] (qui est une diagonale du cube) est plus grande : il écrit au tableau « $|AZ| \geq |AX| = |XZ|$ ». David est visiblement convaincu par cet argument, mais demande ce qui se passe lorsque *A* est un point autre que le milieu de [*DG*].

Aymeric intervient alors, pour dire qu'il n'a pas compris l'argument d'Arthur. Ce dernier réexplique, puis est saisi d'un doute, son raisonnement serait-il faux ? Aymeric répond à son interrogation en fournissant un contre-exemple : dans le cas d'un triangle rectangle isocèle, il est clair que l'hypoténuse est plus longue que les deux autres côtés, mais le triangle n'en est pas obtusangle pour autant. Johan renchérit sur cet argument en exhibant un exemple chiffré : si les côtés de ce triangle rectangle isocèle sont de longueur 1, alors l'hypoténuse est de longueur $\sqrt{2}$ (voir la figure 4). La classe en conclut que l'argument d'Arthur est faux.

Figure 4. *Dessins d'Aymeric et Johan pour contredire l'argument d'Arthur*

Sandrine intervient alors pour dire qu'il « suffit de faire le calcul » ! Si on pose que la longueur du côté du cube est égale à 1, on peut calculer les longueurs des côtés du triangle et le théorème de Pythagore permet de conclure s'il est rectangle ou non.

L'enseignante prend alors le temps d'un commentaire didactique à destination des étudiant·es, futur·es enseignant·es, pour remarquer qu'à ce moment, dans une classe d'élèves du secondaire, on pourrait repasser dans une phase de « résolution de problème » individuelle, où chaque élève travaille de son côté pour effectuer les calculs, plutôt que de laisser une personne expliquer au tableau.

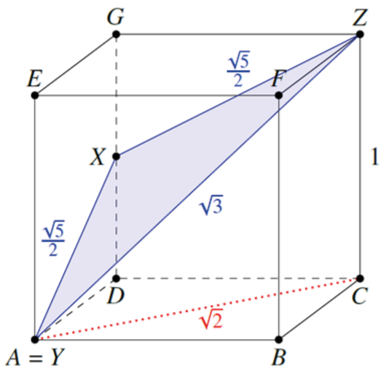

Figure 5. *Dessin de Sandrine au tableau pour expliquer son calcul des longueurs des côtés du triangle*

Sandrine expose son raisonnement au tableau. Son dessin est reproduit à la figure 5. Après calcul, il apparait que les côtés [*AX*] et [*XZ*] sont de longueur $\frac{\sqrt{5}}{2}$, alors que le côté [*AZ*] (l'hypoténuse du triangle rectangle présumé) a pour longueur $\sqrt{3}$. Or, $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{10}{4} \neq 3 = \left(\sqrt{3}\right)^2$. Sophie en conclut « par la réciproque de Pythagore » que le triangle ne peut être rectangle.

Comme personne ne tique, l'animatrice du débat demande s'il s'agit bien ici de la réciproque du théorème de Pythagore ou du théorème lui-même. David dit que pour lui, il s'agit plutôt de la contraposée du théorème de Pythagore, ou bien d'un raisonnement par l'absurde, mais pas vraiment de la réciproque du théorème de Pythagore.

On prend un moment pour se mettre d'accord sur le fait qu'on utilise bien ici la contraposée, équivalente au théorème, puis on procède à un nouveau vote concernant la validité de la conjecture 8. Seuls David et Nadine ne votent pas pour « faux ». À nouveau, David dirait plutôt que « ça dépend ».

Amélie fait remarquer que pour elle, $Y = A$ implique que le triangle est isocèle, mais cette idée ne sera pas relevée par d'autres, car à ce moment, Sonia remarque que la conjecture n'est pas bien formulée (« Il manque des mots »). En effet, la conjecture est à ce moment exprimée au tableau sous la forme succincte « $Y = A \Rightarrow \Delta$ rectangle ». On clarifie donc par « Si $Y = A$, alors le triangle XYZ est (toujours) rectangle ». On remarque qu'il y avait donc un « toujours » caché, c'est-à-dire que l'énoncé dit bien que le triangle doit être rectangle pour tout choix de point X sur le segment $[DG]$. David admet alors que l'énoncé est faux, mais il insiste sur le fait qu'on a quand même un triangle rectangle lorsque $Y = A$ et $X = D$ ou G.

Christophe souligne qu'il ne suffit pas d'un exemple de cas particulier où l'énoncé est vrai pour pouvoir conclure à sa vérité en général. Par contre, un contre-exemple comme celui qu'on a trouvé suffit à décider que l'énoncé est faux. Une étudiante observe alors qu'on pourrait écrire un énoncé vrai avec un « il existe » plutôt qu'un « pour tout ». C'est-à-dire qu'il existe des choix tels que $Y = A$ et que le triangle est rectangle.

Toute la classe se met alors d'accord sur le fait que la conjecture 8 est fausse. David admet qu'il a continué à défendre la conjecture même en sentant que quelque chose clochait, « par orgueil » : il avait du mal à admettre qu'il s'était trompé au début.

L'animatrice souligne qu'il y avait un « pour tout » qui se cachait dans l'énoncé de la conjecture et que le fait qu'il n'apparaisse pas explicitement a créé une confusion et a nourri le débat. On formule une conjecture 8 bis, validée par le débat : « Il existe X tel que si $Y = A$, le triangle XYZ est rectangle ».

2.8. Conclusion du débat

Le cours touchant à sa fin, la conjecture 9 ne sera pas mise en débat comme initialement prévu. Le débat sur les conjectures 1, 2, 3, 4 et 8 aura duré un peu moins d'une heure au total, toutes phases confondues.

On peut observer que le débat a bien pris, une grande partie des étudiant·es se sont exprimé·es, ne serait-ce qu'à une reprise. Dans la narration ci-dessus, on dénombre pas moins de treize intervenant·es parmi les étudiant·es, sur un total de quinze. La séance se déroulant pendant une période encore perturbée par la situation sanitaire, quatre autres étudiant·es suivaient le cours en distanciel, mais ne sont pas intervenu·es dans le débat.

À l'issue du débat, l'enseignante revient sur les temps forts de celui-ci et met en évidence les arguments convaincants (corrects ou, plus important encore, incorrects) et les démarches utilisées par les étudiant·es au cours de leur discussion du problème. En particulier, elle revient ici sur la nécessité d'expliciter les quantifications des énoncés mathématiques travaillés, sur la confusion autour des notions de réciproque et de contraposée dans le cas du théorème de Pythagore et sur l'argument fort convaincant des « plans perpendiculaires ». Nous aurons l'occasion de revenir sur ces contenus d'apprentissage dans la section suivante. L'enseignante profite également de ce moment de conclusion du débat pour faire quelques commentaires d'ordre méthodologique à ses étudiant·es (rappelons que le contexte de l'activité était ici un cours de didactique des mathématiques à destination de futur·es enseignant·es). En particulier, elle insiste sur la nécessité de préparer le débat et notamment de s’interroger en amont de l’activité sur les bénéfices possibles à mettre en évidence lors de la conclusion du débat.

Cette phase de conclusion permet de cristalliser les contenus et démarches apparus au cours du débat et de les intégrer aux savoirs de la classe. L’importance de ce travail de synthèse des savoirs par l’enseignant·e a été montrée dans le contexte de la théorie des situations didactiques de Guy Brousseau, où on parle de « phase d’institutionnalisation ». Il s’agit ici pour l’enseignant·e de

> […] prendre acte de ce que les élèves ont fait, décrire ce qui s’est passé et ce qui a un rapport avec la connaissance visée, donner un statut aux événements de la classe, comme résultat des élèves et comme résultat de l’enseignant, assumer un objet d’enseignement, l’identifier, rapprocher ces productions des connaissances des autres (culturelles, ou du programme), *indiquer qu’elles peuvent resservir.* (Brousseau, 1998, p. 311, nous soulignons.)

Ce travail, qui s’appuie sur des productions d’élèves non nécessairement toutes anticipées, peut s’avérer délicat à réaliser sur le vif et pourra, si nécessaire, être réalisé par l’enseignant·e lors d’une séance ultérieure, à partir de notes prises durant le débat.

3. Éléments d’analyse de nœuds du débat

Nous présentons ci-après des éléments d’analyse de quelques arguments et démarches des étudiant·es apparus lors du débat, sous le prisme de la logique mathématique. Ceux-ci constituent pour nous les contenus d’apprentissage principaux de la séance observée, d’ailleurs en grande partie institutionnalisés par l’enseignante lors de la conclusion du débat.

3.1. Liens logiques entre les différentes conjectures

Les différentes conjectures proposées ne sont pas toutes indépendantes les unes des autres. Il n’a par exemple pas échappé aux étudiant·es que la vérité de la deuxième implique celle de la première et que la vérité de la huitième implique celle de la quatrième.

Observons cependant que la raison n’en est pas la même. Dans le premier cas, les conjectures 1 et 2 partagent les mêmes prémisses, « $X = D$ et $Y = B$ », mais le conséquent de l’implication de la conjecture 2, « le triangle XYZ est équilatéral », implique celui de la conjecture 1, « le triangle XYZ est isocèle ». On peut dire que la conclusion de la conjecture 2 est plus forte que celle de la conjecture 1.

Dans le second cas, c’est l’inverse. Les implications des conjectures 4 et 8 partagent une même conclusion, « le triangle XYZ est rectangle », mais la vérité des prémisses de la conjecture 4, « $X = D$ et $Y = A$ », implique la vérité de celle de la conjecture 8, « $Y = A$ ». On dit que les hypothèses de la conjecture 8 sont plus faibles que celle de la conjecture 4, donc si la conjecture 8 est vraie, il est certain que la conjecture 4 l'est aussi. Dans le cas présent, seule la conjecture aux hypothèses plus fortes est vraie.

Remarquons également que les conjectures 2 et 3 ne peuvent être vraies en même temps, ceci parce qu'elles partagent les mêmes prémisses mais ont des conclusions contradictoires : le triangle *XYZ* ne peut être à la fois équilatéral et rectangle. Ceci a été exploité au cours de la discussion pour conclure à la fausseté de la conjecture 3, la conjecture 2 ayant été établie comme vraie par la classe.

3.2. Un raisonnement erroné pour une conclusion vraie

À deux reprises, les étudiant·es ont utilisé un argument faux pour justifier une affirmation vraie. Un tel argument fallacieux est particulièrement difficile à démasquer. Une technique à employer est d'essayer de transposer le raisonnement dans un autre cas que celui qui nous occupe, où les hypothèses de la proposition avancée sont bien vérifiées, mais où sa conclusion n'est plus vraie. Il devient alors évident que les hypothèses n'impliquent pas la conclusion comme postulé. C'est bien ce qu'ont fait les étudiant·es dans les deux cas que nous analysons ci-dessous, en exhibant un contre-exemple aux arguments avancés.

3.2.1. Les plans perpendiculaires

L'argument des deux plans perpendiculaires qu'Amélie donne pour démontrer la conjecture 4 n'est pas valide. Cependant, la conclusion est bien vraie et l'argument est même jugé plus convaincant que le raisonnement (valide) d'Arthur par certain·es étudiant·es.

Le raisonnement invalide que donne Amélie est démasqué comme tel par Isabelle, qui montre que s'il était valide, alors on aurait pu l'appliquer également au triangle *BDZ* et montrer ainsi qu'il est rectangle ; or, on a justement montré le contraire au début du débat.

Observons que, lors d'autres essais ultérieurs de cette activité dans d'autres contextes (classes de secondaire ou d'étudiants en haute école pédagogique[6]), il est apparu que cet argument faux était particulièrement récurrent et souvent très convaincant pour les participants. Voir à ce propos Zimmer *et al*. (2022).

6 En Belgique, les hautes écoles pédagogiques sont des établissements d'enseignement supérieur où l'on forme notamment les futurs enseignants du secondaire inférieur, c'est-à-dire les futurs enseignants pour les élèves de 12 à 15 ans environ.

3.2.2. Le triangle obtusangle

La même situation peut être observée dans le cas de l'argument qu'Arthur donne pour montrer que le triangle AXZ est obtusangle lorsque X est le point milieu du segment $[DG]$. En effet, le triangle est bien obtusangle (même si on n'a pas insisté sur ce point lors du débat), mais l'argument avancé, qui stipule qu'un triangle isocèle est obtusangle dès que le côté opposé à l'angle considéré est plus grand que les deux autres côtés égaux, est invalide. Ceci sera montré par le contre-exemple trouvé par Aymeric.

3.3. Réciproque ou contraposée ?

La discussion sur le théorème de Pythagore et sa réciproque montre une certaine confusion autour de la notion de contraposée et de réciproque. Cette confusion a été sentie par quelques étudiant·es, mais relevons que l'intervention de l'enseignante a été nécessaire pour focaliser l'attention du groupe sur ce point lorsqu'il est apparu dans le cours de la discussion.

En général, étant donné une implication $p \Rightarrow q$, sa réciproque est donnée par $q \Rightarrow p$, alors que sa contraposée est $\neg q \Rightarrow \neg p$[7]. La contraposée est équivalente à la proposition originale, alors que la vérité d'une implication est indépendante de celle de sa réciproque.

Si le théorème de Pythagore est donné par la proposition « Étant donné un triangle ABC, s'il est rectangle en B, alors $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$ », c'est-à-dire que p est « le triangle ABC est rectangle en B » et q est « $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$ », alors sa réciproque est donnée par « Étant donné un triangle ABC, si $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$, alors ce triangle ABC est rectangle en B », tandis que sa contraposée est « Étant donné un triangle ABC, si $|AB|^2 + |BC|^2 \neq |AC|^2$, alors ce triangle ABC n'est pas rectangle en B ». Dans le cas de ce théorème, il est bien connu que la réciproque est vraie, mais ce n'est pas le cas en général pour une proposition quelconque, et la distinction est donc cruciale.

Pour le triangle AXZ qui nous occupait dans cette discussion, avec X situé au milieu de $[DH]$, on a calculé que $|AX|^2 + |XZ|^2 \neq |AZ|^2$, mais la réciproque du théorème de Pythagore ne nous permet pas d'en déduire quoi que ce soit. Ce qui nous permet de déduire que le triangle n'est pas rectangle est bien la contraposée : en partant de l'observation que $|AX|^2 + |XZ|^2 \neq |AZ|^2$, on peut déduire *via* la contraposée que le triangle AXZ n'est pas rectangle en X.

7 Cette notation se lit comme « Non q implique non p », c'est-à-dire « Si la proposition q est fausse, alors la proposition p l'est aussi ».

3.4. Quantificateur universel implicite

Les réticences de David à déclarer la conjecture 8 comme fausse étant donné qu'elle admet plusieurs exemples (mais aussi de nombreux contre-exemples) pourraient s'expliquer en partie par la coexistence de plusieurs interprétations possibles de la notion d'implication. Ce genre de difficulté a notamment été analysé par Viviane Durand-Guerrier (1999), mais aussi plus récemment par Hérault *et al.* (2016), qui s'intéressent à la quantification des énoncés mathématiques discutés en classe et montrent l'importance d'expliciter ces quantifications.

Dans l'article cité, Viviane Durand-Guerrier développe une situation où les sujets sont amenés à choisir une valeur de vérité pour différents énoncés, à savoir : « vrai », « faux » ou « on ne peut pas savoir », cette dernière possibilité étant censée être choisie lorsque les informations données par l'énoncé ne permettent pas de décider avec certitude de sa vérité. Le raisonnement de cet article, transposé au cas qui nous préoccupe, est essentiellement d'argumenter qu'il y a deux façons différentes d'interpréter l'énoncé « Si $Y = A$, alors le triangle est rectangle ».

D'une part, on peut interpréter cet énoncé comme étant implicitement universellement quantifié, c'est-à-dire comme étant équivalent à « Pour tout choix de point X (sur le segment $[DG]$), le triangle AXZ est rectangle », ce qui semble être le choix naturel du mathématicien, adopté par la majorité de la classe dans ce cas-ci (rappelons que les étudiant·es avaient ici suivi une formation supérieure en mathématiques), et pour lequel on peut clairement dire qu'il est faux, puisqu'on peut exhiber plusieurs contre-exemples. On parle dans ce cas d'une « implication formelle », où l'antécédent et le conséquent dépendent d'une même variable, et qui est fausse dès lors qu'il existe une instance de l'énoncé où l'antécédent est vrai mais pas la conclusion (c'est-à-dire dès qu'il en existe un contre-exemple). Observons que cette interprétation de l'implication, partagée par convention dans la communauté mathématique, ne coïncide pas forcément avec les habitudes du langage naturel et peut ne pas être partagée d'emblée par le non-initié.

En effet, d'autre part, on peut interpréter l'énoncé comme « Étant donné un triangle XYZ tel que $Y = A$, ce triangle $XYZ = AXZ$ est rectangle ». Cet énoncé, plus ambigu, peut être interprété comme étant équivalent au précédent, si on lit « Étant donné un triangle XYZ tel que $Y = A$ » comme « Étant donné n'importe quel triangle XYZ tel que $Y = A$ », ce qui se ramène à une proposition universelle implicitement quantifiée. Il est alors naturel de répondre que cet énoncé est faux, comme le précédent. Cependant, on peut également voir cet énoncé comme s'appliquant à un triangle choisi, particulier, que l'on ne connait pas forcément. On parle dans ce cas d'une « implication matérielle », implication dont la valeur de vérité dépend seulement de celles de son antécédent et de sa conclusion. La réponse « on ne peut pas savoir » apparait alors comme plus acceptable, étant donné qu'un tel triangle peut être parfois rectangle (lorsque $X = D$ ou G), mais pas toujours, et qu'on ne dispose pas de l'information permettant de trancher.

L’opinion de David n’ayant pas été suffisamment explicitée, il est difficile de conclure que c’est vraiment cette dernière interprétation qui l’a poussé à ne pas déclarer la conjecture 8 directement comme fausse. Cela semble toutefois une explication plausible. Des facteurs sociaux peuvent également être à l’œuvre dans ce genre de cas, par exemple lorsqu’un·e étudiant·e refuse de reconnaître son erreur. Voir à ce sujet l’article de Nicolas Balacheff (1991) sur les limites des situations d’interaction sociale en classe de mathématiques.

Dans tous les cas, le groupe d’étudiant·es est arrivé essentiellement à la même conclusion que Viviane Durand-Guerrier dans son article : lorsqu’on souhaite poser un énoncé universellement quantifié, il vaut mieux rendre cette quantification explicite, sous peine d’occasionner des incompréhensions.

Conclusion

Comme nous l’avons vu, l’activité proposée a rencontré une forte adhésion de la part des étudiant·es, seul·es deux dans la classe n’ayant pas pris la parole du tout. Le débat leur a permis de rentrer dans une démarche active de recherche : proposer des conjectures et les critiquer. Il s’agit d’une part fondamentale de l’activité mathématique, qui n’est pourtant travaillée que rarement dans les cours de mathématiques.

Du point de vue de l’apprentissage du raisonnement mathématique, l’activité a notamment amené les étudiant·es à isoler des arguments et des déductions et à les transposer dans différents contextes pour débusquer leur caractère fallacieux, comme nous le mettons en évidence dans notre analyse.

Le débat a également permis de mettre au jour la confusion de certain·es étudiant·es autour des notions de contraposée et de réciproque d’un énoncé mathématique, confusion qui a alors pu être dissipée par l’enseignante. Il s’agit là d’un bénéfice des débats en classe : en laissant les apprenant·es échanger librement entre pairs, plutôt que de tenter de donner la bonne réponse à l’enseignant·e, on a plus de chances de saisir le fond de leur pensée, et donc de diagnostiquer d’éventuels glissements de sens dans leurs représentations du savoir mathématique.

Enfin, au cours du débat, est apparue la nécessité de formuler précisément les énoncés mathématiques, et, en particulier, d’expliciter la quantification (universelle ou existentielle) lorsqu’une confusion est possible, comme mis en évidence dans l’article de Durand-Guerrier (1999).

Notre point de vue, similaire à celui défendu par Murphy *et al.* (2016), serait que l’apprentissage de la logique (ou du moins des rudiments de celle-ci) est nécessaire aux enseignant·es pour une maitrise approfondie des mathématiques et un enseignement de celles-ci au secondaire d’autant plus fructueux. Nous ne prétendons pas que les apprenant·es deviennent de parfaits logicien·nes seulement par la pratique de débats en classe, mais nous pensons que cette pratique est un outil utile pour permettre la manipulation concrète de la déduction mathématique et susciter l’interrogation des apprenant·es concernant la vérité de certaines affirmations, dans un contexte plus stimulant et avec plus d'enjeux qu'un simple exercice. D'autre part, le débat rend évident le besoin d'un langage formalisé pour parler de mathématiques et donne du sens à celui-ci. L'apparition de malentendus au cours du débat, précisément dus à des compréhensions différentes de certaines phrases et affirmations ambigües, puis leur résolution *via* une clarification desdites phrases, peut faire prendre conscience de l'intérêt du formalisme en mathématique.

De façon plus générale, sans nécessairement pour autant déboucher sur des démonstrations formalisées, la pratique de l'argumentation en classe de mathématique est une compétence qui mérite d'être développée pour elle-même[8].

Bibliographie

Balacheff, N. (1991). Benefits and Limits of Social Interaction: The Case of Mathematical Proof. Dans Bishop, A. J., Mellin-Olsen, S. & van Dormolen, J. (Ed.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 175-192), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers,.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33-115. URL : https://revue-rdm.com/1986/fondements-et-methodes-de-la/

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée sauvage.

Durand-Guerrier, V. (1999). L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit x*, *50*, 57-79. URL : https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/50x7_1568716595360-pdf

Duval, R. (1993). Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive. *Petit x*, *31*, 37-61. URL : https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/31x5_1570192011747-pdf

Gilbert, T. (2020). Comparaison de carrelages et d'ensembles infinis. *Losanges*, *49*, 27-39. URL : https://labmath.fesec.be/wp-content/uploads/2021/03/Losanges-49.pdf

Gilbert, T. (2021). Apprendre à débattre et à animer un débat mathématique. *Au fil des maths*, *542*, 17-25.

Hérault, F., Huet, C., Kel Notter, G. & Mesnil, Z. (2016). À propos de quantifications : quelques activités de logique dans nos classes. *Petit x*, *100*, 35-61. URL : https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/PX/IGR16003/IGR16003.pdf

8 À propos de la différence entre argumentation et démonstration, voir Duval (1993). Cet article montre que l'apprentissage de l'argumentation ne débouche pas naturellement sur un apprentissage de la démonstration, mais défend néanmoins l'apprentissage de l'argumentation en mathématiques.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.

Legrand, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. *Repères IREM*, *10*, 123-158. URL : https://www.univ-irem.fr/reperes/articles/10_article_68.pdf

Legrand, M. (2017). *Désir de démocratie et d'humanisme authentiques et nécessité d'opérer une révolution dans notre façon de concevoir le savoir et son partage à l'école. Un exemple : « le principe du débat scientifique en cours »*. Forum de l'Éducation. Accessible sur https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/debat-scientifique-documents-en-cours-d-elaboration-602875.kjsp, consulté le 7 avril 2022.

Leroux, L. & Lecorre, T. (2007). Le « Débat scientifique » en classe. Comment donner à l'élève une responsabilité scientifique réelle en cours de mathématique ? *APMEP-Plot*, *19*, 2-15. URL : https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/APL/APL07009/APL07009.pdf

Murphy, C., Weima, S. & Durand-Guerrier, V. (2016). Des activités pour favoriser l'apprentissage de la logique en classe de seconde. *Petit x*, *100*, 7-34. URL : https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/PX/IGR16002/IGR16002.pdf

Zimmer, D. & Ninove, L. (2022). Un problème de géométrie pour conjecturer et débattre. *Repères-IREM*, *129*, 63-84. URL : https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/129-article-847_1678402812127-pdf