

Mathematics means proving theorems, inventing entire theories, methods, algorithms. It is a truly creative activity in all possible ways. Difficult to understand, however. That's why mathematicians, even great mathematicians, feel the need to try to explain, clarify, even if only a small part, of what constitutes their activity. Well aware that mathematics are complicated, difficult to explain. In a certain way mathematicians suffer from a lack of recognition, everyone agrees that mathematics is an important discipline, essential, of high commitment, but no one really wants to understand its laws and strategies. This is where the idea of talking about mathematics emerges, telling stories of the work of mathematicians, even trying to clarify for their own sake, for themselves, the mathematicians, what actually happens when the revelation of the proof of a result that no one ever got before appears before the eyes of a researcher.

Matematica significa dimostrare teoremi, inventare intere teorie, metodi, algoritmi. È una attività creativa a tutti gli effetti. Poco comprensibile, però. Ecco perché i matematici, anche i grandi matematici, sentono la necessità di cercare di spiegare, di chiarire, anche se in minima parte in che cosa consista la loro attività. Ben consapevoli che è una attività molto complicata, difficile, faticosa cercare di far capire. In qualche senso il matematico soffre di questa mancanza di riconoscimento, in cui magari tutti sono concordi che la matematica sia una disciplina importante, essenziale, di grande impegno, ma di cui nessuno vuol in realtà capire le leggi e le strategie. Ecco allora il raccontare, il raccontarsi, anche per cercare di chiarire a se stessi, ai matematici, che cosa in realtà avviene nel momento in cui appare davanti agli occhi di un ricercatore la rivelazione della avvenuta dimostrazione di un risultato che nessuno ha mai ottenuto prima.

1. Elaborare o spiegare

Per un matematico di professione è un'esperienza melanconica mettersi a scrivere sulla matematica. La funzione del matematico è quella di fare qualcosa, di dimostrare nuovi teoremi e non di parlare di ciò che è stato fatto da altri matematici o da lui stesso. Gli uomini politici disprezzano i giornalisti, i pittori disprezzano i critici d'arte, i fisiologi, i fisici e i matematici hanno, in genere, un sentimento analogo. Non c'è disprezzo più profondo né, tutto sommato,

¹ IVSLA, Venezia & ex Università La Sapienza, Roma.

più giustificato di quello che gli uomini che fanno provano verso gli uomini che spiegano. Esposizione, critica, valutazione sono attività per cervelli mediocri².

Parole del matematico Godfrey H. Hardy nell'autobiografia scientifica *A Mathematician's Apology* pubblicata nel 1940. Nella introduzione al volume Charles P. Snow, autore del famosissimo saggio *The Two Cultures and the Scientific Revolution*³ parlava tra l'altro della grande depressione che aveva colpito Hardy, che aveva anche tentato il suicidio :

Ecco perché *l'Apologia di un matematico* se la si legge con l'attenzione testuale che merita, è un libro di una tristezza ossessionante [...]. È un appassionato lamento per la perdita di un potere creativo che c'era e non tornerà più. Non c'è niente di simile nella letteratura : probabilmente perché la maggior parte di quelli che sono dotati di capacità letterarie per esprimere un tale lamento non giungono a provare questo sentimento : è molto raro che uno scrittore si renda conto dell'irrevocabilità di essere assolutamente finito⁴.

Aveva scritto nell'entusiastica recensione al volume dal titolo *The Austere Art, a review of A Mathematician's Apology by G. H. Hardy* lo scrittore Inglese Graham Greene che Hardy non doveva fare ammenda di nulla perché « I know of no writing - except perhaps Henry James's *Introductory essays* - which conveys so clearly and with such an absence of fuss the excitement of the creative artist »⁵.

Hardy concludeva il suo libro con queste parole :

Ho un'unica possibilità di sfuggire a un verdetto di irrilevanza totale se si giudica che ho creato qualcosa che valeva la pena creare. Che ho creato qualcosa è innegabile : la questione riguarda il suo valore.

La sola difesa della mia vita, allora, o di chiunque sia stato matematico nello stesso mio senso, è dunque questa : ho aggiunto qualcosa al sapere e ho aiutato altri ad aumentarlo ancora ; il valore dei miei contributi si differenzia soltanto in grado, non in natura, dalle creazioni dei

² Godfrey H. HARDY, *Apologia di un matematico*, traduzione di Luisa SARAVALL, Milano, Garzanti, 1989, p. 53. (ed. orig.) *A Mathematician's Apology*, Cambridge, Cambridge University Press, 1940.

³ Charles P. SNOW, *The Two Cultures and the Scientific Revolution*, Cambridge, Cambridge University Press, 1961.

⁴ Ch. P. SNOW, « Prefazione » a G. H. HARDY, *Apologia di un matematico*, op. cit., p. 41.

⁵ Graham GREENE, « The Austere Art, a review of A Mathematician's Apology by G. H. Hardy », in *The Spectator*, 20/12/1940.

grandi matematici, o di tutti gli altri artisti, grandi e piccoli, che hanno lasciato qualche traccia dietro di loro⁶.

Alla luce di quanto dice Hardy, si possono fare moltissimi esempi simili, per poter comprendere di che cosa scrivono nei libri che parlano della loro attività i matematici si impone di cercare di rispondere ad una domanda cruciale :

2. Che cosa è la matematica ?

Sono molti i matematici che hanno riflettuto e scritto sul proprio lavoro, sull'attività che svolgono. Tra i tanti Richard Courant e Herbert Robbins in un libro del 1941 che si chiamava esattamente *Che cosa è la matematica* :

Come espressione della mente umana, la matematica riflette la volontà attiva, la ragione contemplativa e il desiderio di perfezione estetica. I suoi elementi sono la logica e l'intuizione, l'analisi e la costruzione, la generalità e l'individualità [...]. Soltanto la reazione di queste forze antitetiche e la lotta per la loro sintesi costituiscono la vita, l'utilità e il valore supremo della scienza matematica.

Qualunque sviluppo della matematica ha senza dubbio le sue radici psicologiche in esigenze più o meno pratiche, ma, una volta iniziato sotto la pressione della loro necessità, esso inevitabilmente acquista valore in se stesso e trascende i limiti dell'utilità immediata⁷.

Una risposta che non credo soddisfi né i matematici né i non matematici. Il problema è che come in tante altre questioni che l'umanità si pone la risposta in pratica non esiste.

Probabilmente Bertrand Russel aveva ragione quando affermava che la matematica può definirsi come la materia nella quale non sappiamo mai di che cosa stiamo parlando né se quel che stiamo dicendo è vero.

⁶ G. H. HARDY, *Apologia di un matematico*, op. cit., p. 105.

⁷ Richard COURANT e Herbert ROBBINS, *Che cosa è la matematica ?*, trad. di Liliana RAGUSA GILLI, Torino, Bollati Boringhieri, 2000, p. 29. (ed. orig.) *What is Mathematics ? An Elementary Approach to Ideas and Methods*, New York, Oxford University Press, 1941.

Henri Poincaré riflette a lungo sul valore della matematica. Lo fa anche raccontando molti episodi della sua vita di matematico nel libro pubblicato nel 1902 *La Science et l'Hypothèse* :

La possibilité même de la science mathématique semble une contradiction insoluble. Si cette science n'est déductive qu'en apparence, d'où lui vient cette parfaite rigueur que personne ne songe à mettre en doute ?

Si, au contraire, toutes les propositions qu'elle énonce peuvent se tirer les unes des autres par les règles de la logique formelle, comment la mathématique ne se réduit-elle pas à une immense tautologie ?

Le syllogisme ne peut rien nous apprendre d'essentiellement nouveau et, si tout devait sortir du principe d'identité, tout devrait aussi pouvoir s'y ramener. Admettra-t-on donc que les énoncés de tous ces théorèmes qui remplissent tant de volumes ne soient que des manières détournées de dire que A est A ?

La contradiction nous frappera davantage si nous ouvrons un livre quelconque de mathématiques ; à chaque page l'auteur annoncera l'intention de généraliser une proposition déjà connue. Est-ce donc que la méthode mathématique procède du particulier au général et comment alors peut-on l'appeler déductive ?

Si l'on se refuse à admettre ces conséquences, il faut bien concéder que le raisonnement mathématique a par lui-même une sorte de vertu créatrice et par conséquent qu'il se distingue du syllogisme⁸.

Se alla domanda di che cosa sia la matematica, la risposta è complicata, può porsi un'altra questione :

3. Chi sono i matematici ?

Così risponde sempre sempre Poincaré :

Les mathématiciens procèdent donc *par construction*, ils *construisent* des combinaisons de plus en plus compliquées. Revenant ensuite par l'analyse de ces combinaisons, de ces ensembles, pour ainsi dire, à leurs éléments primitifs, ils aperçoivent les rapports de ces éléments et en déduisent les rapports entre des ensembles eux-mêmes.

⁸ Henri POINCARÉ, *La Science et l'Hypothèse*, Paris, Flammarion, 1968, p. 31. [1902]. Ed. it.ecc. *La scienza e l'ipotesi*, trad. Maria Grazia PORCELLI, Bari, Dedalo (ed.), 1989.

Les mathématiciens n'étudient pas des objets, mais des relations entre les objets ; il leur est donc indifférent de remplacer ces objets par d'autres, pourvu que les relations ne changent pas. La matière ne leur importe pas, la forme seule les intéresse⁹.

Hardy mette in luce un elemento fondamentale :

Il matematico, come il pittore e il poeta, è un creatore di forme. Se le forme che crea sono più durature delle loro è perché le sue sono fatte di idee [...]. Il matematico non ha altro materiale con cui lavorare, se non le idee ; quindi le forme che crea hanno qualche probabilità di durare più a lungo, perché le idee usurano meno delle parole. Le forme create dal matematico, come quelle del pittore e del poeta, devono essere belle [...].

La bellezza è il requisito fondamentale, al mondo non c'è posto perenne per la matematica brutta¹⁰.

Jean Dieudonné, in *Pour l'honneur de l'esprit humain* del 1989 riassume la situazione, che non muta nel passaggio delle generazioni « La situazione della matematica nel quadro delle attività dell'uomo è paradossale. Oggi quasi tutti sanno che la matematica è una disciplina importante, necessaria praticamente in tutti i settori della scienza e della tecnica [...]. Se si chiede *Che cosa è la matematica* oppure *Che cosa fa un matematico* ? è raro non ottenere una risposta assurda »¹¹.

In ogni caso per Dieudonné un matematico sarà qualcuno che ha pubblicato almeno la dimostrazione di un teorema non banale.

Anche se non è chiaro che cosa la matematica sia, un'altra domanda può essere posta :

4. La realtà matematica

Non è all'architettura, all'arte del costruire, che si devono paragonare la geometria e l'analisi, ma alla botanica, alla geografia, alle scienze fisiche stesse.

Si tratta di descrivere un mondo, di scoprirlo e non di costruirlo o inventarlo,

⁹ H. POINCARÉ, *La Science et l'Hypothèse*, op. cit., p. 43.

¹⁰ G. H. HARDY, *Apologia di un matematico*, op. cit., pp. 66-67.

¹¹ Jean DIEUDONNÉ, *L'arte dei numeri*, trad. Paolo PAGLI, Milano, Mondadori, 1989, p. 7. ed. orig. *Pour l'honneur de l'esprit humain*, Paris, Hachette, Paris, 1987.

perché esso esiste al di fuori dello spirito umano e indipendentemente da esso.

Raymond Queneau, *Odile*¹²

L'opinione di Hardy è molto chiara :

Credo che la realtà matematica sia fuori di noi, che il nostro compito sia di scoprirla o di osservarla e che i teoremi che noi dimostriamo, qualificandoli pomposamente come nostre creazioni siano semplicemente annotazioni delle nostre osservazioni [...]. Può darsi che la fisica moderna si adatti meglio a qualche costruzione della filosofia idealistica [...]. La matematica pura, al contrario, mi sembra lo scoglio contro cui ogni forma di idealismo inevitabilmente si infrange : 317 è un numero primo, non perché lo pensiamo noi o perché la nostra mente è conformata in un modo piuttosto che in un altro, ma perché è così, perché la realtà matematica è fatta così¹³.

Qualche anno fa si è svolto un interessante dibattito, pubblicato in un libro tradotto in molte lingue, tra un matematico famoso, Alain Connes, vincitore della medaglia Fields, - il Nobel non esiste per la matematica -, ed un neurobiologo, Jean-Pierre Changeux. Tema : la realtà matematica. Così sintetizza la situazione il matematico :

Da un lato esiste indipendentemente dall'uomo una realtà matematica bruta e immutabile, dall'altro noi la percepiamo soltanto grazie al nostro cervello, a prezzo, come diceva Valéry, di una rara commistione di concentrazione e desiderio. Io dissocio quindi la realtà matematica dallo strumento che abbiamo per esplorarla, il cervello [...]. Meglio si capirà il suo funzionamento meglio potremo utilizzarlo.

Ma non per questo la realtà matematica ne uscirà modificata [...]. credo che si debba fare attenzione a non confondere la realtà matematica con la sua possibile illustrazione in certi fenomeni naturali [...].

Io credo che il matematico sviluppi un senso irriducibile alla vista, all'udito e al tatto, che gli permette di percepire una realtà vincolante come la realtà fisica ma molto più stabile, perché non localizzata nello spaziotempo¹⁴.

¹² Raymond QUENEAU, *Odile*, Paris, Gallimard, 1937, citato in Edoardo VESENTINI, « Presentazione », in G. H. HARDY, *Apologia di un matematico*, op. cit., p. 7.

¹³ G. H. HARDY, *Apologia di un matematico*, op. cit., pp. 89-93.

¹⁴ Jean-Pierre CHANGEUX e Alain CONNES, *Pensiero e materia*, trad. Claudio MILANESI, Torino, Bollati Boringhieri, 1991, pp. 32-34. (ed. orig.) *Matière à pensée*, Paris, Editions Odile Jacos, 1989.

Nel libro *La mente nuova dell'Imperatore* Sir Roger Penrose dedica una parte alla realtà degli oggetti matematici :

Quanto sono reali gli oggetti del mondo matematico ?

Da un certo punto di vista pare che in essi non possa esserci niente di reale. Gli oggetti matematici sono solo concetti ; essi sono le idealizzazioni mentali dei matematici [...]. Al tempo stesso questi concetti matematici sembrano non di rado avere una profonda realtà, del tutto sottratta alla volontà di un qualsiasi matematico. È come se il pensiero umano fosse guidato verso una qualche verità esterna eterna : una verità dotata di una realtà propria e che è rivelata solo in parte a ciascuno di noi¹⁵.

5. La matematica : invenzione o scoperta ?

Sempre Penrose precisa :

Quando un matematico ottiene i suoi risultati sta solo producendo complesse strutture mentali che non hanno alcuna realtà di fatto, ma la cui potenza ed eleganza sono semplicemente sufficienti a ingannare persino i loro inventori, inducendoli a credere che queste mere costruzioni mentali siano reali ?

Oppure i matematici scoprono davvero verità già esistenti : verità la cui esistenza è del tutto indipendente dalle attività del matematico ?

In matematica ci sono cose per le quali l'espressione scoperta è molto più appropriata di invenzione. [sta pensando all'insieme di Mandelbrot scoperto dal matematico Benoit Mandelbrot alla fine degli anni sessanta del secolo scorso].

Questi sono i casi in cui emerge dalla struttura molto di più di quanto non vi sia posto in principio. Qualcuno potrebbe pensare che in tali casi i matematici si sono imbattuti in opere di Dio.

Ci sono però altri casi in cui la struttura matematica non ha un'unicità altrettanto convincente. In tali casi è probabile che dalla costruzione non venga fuori più di quanto vi è stato messo in principio, e la parola invenzione sembra più appropriata che scoperta. Queste sono in effetti opere dell'uomo¹⁶.

¹⁵ Roger PENROSE, *La mente nuova dell'Imperatore*, trad. Libero SOSIO, Milano, Rizzoli, 1992, pp. 133-134. (ed. orig.) *The Emperor's New Mind*, New York, Oxford University Press, 1989.

¹⁶ R. PENROSE, *La mente nuova dell'imperatore*, op. cit., p. 136.

Ecco cosa scrive nella autobiografia uno dei matematici francesi che ha vinto nel 2010 la medaglia Fields, Cédric Villani. Un racconto autobiografico in cui il matematico cerca di far comprendere come la sua mente ragiona, come arriva ad un risultato, cercando, frugando, distraendosi, assemblando, comunicando.

Ho parlato a lungo del risultato che ho in testa, dei miei tentativi, dei molti pezzi che non sono in grado di assemblare, del puzzle logico che non si compone, dell'equazione di Boltzman ancora e sempre ribelle. L'equazione di Boltzman è la più bella equazione del mondo [...].

Alcuni dicono che nessuno al mondo conosce meglio di me il mondo matematico generato da questa equazione [...]. Bisogna innanzi tutto capire quale sia la domanda da porsi ! Nella ricerca matematica identificare l'obiettivo con chiarezza è sempre un primo passo cruciale [...] e delicato.

Il matematico non può osservare il mondo direttamente ma solo il suo riflesso, che nel suo caso è quello matematico ! E quindi è nel mondo delle idee matematiche retta dalla sola logica, che partiremo alla caccia.

In metropolitana tiro fuori un Manga dalla tasca e il mondo esterno scompare per lasciare spazio a un universo popolato di chirurghi dall'abilità sovrumana col viso rattoppato, di yazuka inveterati che si sacrificano per le loro nipotine, da crudeli mostri che si trasformano in eroi da tragedia e di ragazzini che diventano a loro volta mostri crudeli.

Un mondo scettico e tenero, appassionato e disincantato, senza pregiudizi né manicheismi, che tracima emozione, colpisce al cuore e strappa una lacrima al lettore pronto a giocare il gioco dell'ingenuo.

Fermata Hotel de Ville : è il momento di scendere. Nel solo tempo del breve tragitto, il racconto mi è entrato nel cervello e nelle vene come un piccolo ruscello d'inchiostro e carta : sono depurato dall'interno.

I miei pensieri matematici sono a riposo. Manga e matematica non si mescolano. Magari più tardi, nei sogni ?¹⁷

Il matematico cerca di comunicare i suoi pensieri, come se stessimo assistendo al momento in cui si formano, cercando di far cogliere il processo mentale che avviene :

¹⁷ Cédric VILLANI, *Il Teorema vivente*, trad. Paolo BELLINGERI, Milano, Rizzoli, 2013, pp. 10, 11, 26. (ed. orig.) *Théorème Vivant*, Paris, Editions Grasset & Fasquelle, 2012.

Quello che conta nell'equazione linearizzata non è l'analisi spettrale, è la soluzione di Cauchy. Sì, certo. È sensato. L'ho sempre pensato. Allora, come lo fanno... Mmmmh. Trasformata di Fourier: decisamente, questa cara vecchia analisi di Fourier, non si è mai fatto niente di meglio. Trasformata di Laplace, relazione di dispersione...

Le stelle si fanno spazio nel mio cervello. A proposito, che teorema voglio dimostrare, esattamente ?

Non ho fatto progressi in nessuna dimostrazione ma ho varcato una soglia : adesso so che cosa voglio dimostrare.

Dimostrare che una soluzione dell'equazione di Vlasov non lineare, spazialmente periodica, vicina ad un equilibrio stabile evolve spontaneamente verso l'equilibrio.

È un enunciato semplice, probabilmente difficile da dimostrare. Un problema originale su un modello ben conosciuto. Tengo il problema in un angolo del cervello, lo riprenderò in mano a settembre.

A parte la risposta alla domanda (vero o falso) spero che la sua dimostrazione sarà ricca di insegnamenti ! In matematica spesso è come in un romanzo poliziesco o in un episodio del Tenente Colombo: il ragionamento grazie al quale il detective smaschera l'assassino è importante almeno quanto la soluzione stessa del mistero¹⁸.

6. Creatività o invenzione ? Illuminazione ?

Pourquoi une si longue préparation est-elle nécessaire pour s'habituer à cette rigueur parfaite, qui, semble-t-il, devrait s'imposer naturellement à tous les bons esprits ? C'est là un problème logique et psychologique bien digne d'être médité.

H. Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, 1902¹⁹

Un altro matematico dei nostri giorni, che ha risolto un problema famoso aperto da centinaia di anni, che è divenuto il matematico più noto al mondo, ma che non ha vinto la medaglia Fields perché il suo articolo è stato accettato dopo che aveva compiuto quaranta anni, Andrew Wiles, così racconta la sua avventura alla ricerca della dimostrazione dell'*Ultimo Teorema di Fermat* :

¹⁸ C. VILLANI, *Il Teorema vivente*, op. cit., pp. 41-42.

¹⁹ H. POINCARÉ, *La Science et l'Hypothèse*, op. cit., p. 35.

Entri nella prima stanza del palazzo ed è buia. Completamente buia. Avanzi a tentoni urtando dei mobili, ma a poco a poco riesci ad individuare la posizione di ciascun mobile. Infine, dopo sei mesi o più, trovi l'interruttore della luce, lo giri, e di colpo tutto è illuminato. Poi ti sposti nella stanza successiva e passi altri sei mesi nell'oscurità. Così ognuna di queste scoperte, seppure a volte giungano immediate e altre volte richiedano un periodo di un giorno o due, sono il culmine di, e non potrebbero esistere senza, molti mesi a vagare nell'oscurità che precede²⁰.

Il matematico Hadamard, di cui si parlerà in seguito, cita Paul Valéry :

Paul Valéry : C'è un periodo in cui si è come in una camera oscura. In quel momento lo zelo non deve essere eccessivo, a rischio di rovinare la propria lastra. Bisogna lavorare come impiegati di se stessi, come capireparto di se stessi [...]. La delusione che potrebbe seguire è qualcosa di molto curioso [...]. A volte interviene una serie di giudizi che si eliminano a vicenda. Segue allora una sorta di irritazione ; ci si dice che non si riuscirà mai a ritenere ciò che vi appare davanti²¹.

Ritornando al racconto di Andrew Wiles :

Un lunedì mattina, il 19 settembre, sedevo alla mia scrivania ad esaminare il metodo di Kolyvagin-Flach. Non che credessi di riuscire a farlo funzionare ma pensavo di poter almeno spiegare il motivo per cui non funzionava. Pensavo che mi stavo aggrappando ad un filo, ma volevo sentirmi rassicurato.

All'improvviso, in modo del tutto inaspettato, ebbi quella rivelazione incredibile.

Capii che, anche se, il metodo di Kolyvagin-Flach non funzionava completamente, era tutto ciò di cui avevo bisogno per far funzionare la teoria di Iwasawa. Capii che il metodo di Kolyvagin-Flach era sufficiente a far funzionare il mio approccio originario al problema, che

²⁰ Simon SINGH, *L'ultimo teorema di Fermat*, trad. di Carlo CAPARARO e Brunello LOTTI, Milano, Rizzoli, 1997, p. 268. (ed. orig.) : *Fermat's Last Theorem*, Fourth Estate Ltd, 1997, testo trascritto dal film *Fermat's Last Theorem*, regia di Simon SINGH, BBC, 1996.

²¹ Jacques HADAMARD, *La psicologia dell'invenzione in campo matematico*, trad. di Bernardino SASSOLI, Milano, Raffaello Cortina editore, 1993, pp. 54-55. (ed. orig.) : *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*, Princeton University Press, 1945.

risaliva a tre anni prima.

Così la vera risposta al problema sembrava sorgere dalle ceneri di Kolyvagin-Flach²².

Fu un momento di ispirazione che Wiles non dimenticherà mai. Mentre raccontava quegli istanti, il ricordo fu così intenso che egli venne sopraffatto dall'emozione :

Era una soluzione così indescrivibilmente bella, era così semplice e così elegante. Non riuscivo a capire come mi potesse essere sfuggita e la fissai per venti minuti. Poi durante il giorno andai in giro per il dipartimento e continuavo a tornare alla mia scrivania per vedere se la soluzione era ancora lì.

Era ancora lì. Non riuscivo a trattenermi, ero eccitatissimo. Fu il momento più importante della mia vita di lavoro. Niente di quello che potrò mai fare significherà altrettanto²³.

Una grande avventura intellettuale, un grande emozione, in cui, come già più volte sottolineato, ha una grande parte l'eleganza, l'estetica del modo di ottenere il risultato. Con il cervello che continua a pensare, anche in momenti in cui coscientemente si pensa ad altro. Molti grandi matematici hanno cercato di raccontare come questo processo procede.

Depuis quinze jours je m'efforçais de démontrer qu'il ne pouvait exister aucune fonction analogue à ce que j'ai appelé depuis les fonctions fuchsiennes ; j'étais alors fort ignorant ; tous les jours, je m'asseyais à ma table de travail, j'y passais une heure ou deux, j'essayais un grand nombre de combinaisons et je n'arrivais à aucun résultat.

Un soir, je pris m'endormir : les idées surgissaient en foule ; je les sentais comme se heurter, jusqu'à ce que deux d'entre elles s'accrochassent pour former une combinaison stable.

Le matin, j'avais établi l'existence d'une classe des fonctions fuchsiennes [...] je n'eus plus qu'à rédiger les résultats, ce qui ne me prit que quelques heures.

Je voulus ensuite représenter ces fonctions par le quotient de deux séries ; cette idée fut parfaitement consciente et réfléchie [...] Je me demandai quelles devaient être les propriétés de ce séries [...].

À ce moment je quittais Caen que j'habitais alors [...].

Les péripéties du voyage me firent oublier mes travaux mathématiques ; arrivés à Coutances, nous montâmes dans un omnibus pour une promenade [...].

²² S. SINGH, *L'ultimo teorema di Fermat*, op. cit., p. 308.

²³ *Ibidem*.

Au moment où je mettais le pied sur le marche-pied, l'idée me vint, sans que rien dans mes pensées antérieures parut m'y avoir préparé [...] Je ne fis pas la vérification ; je n'en aurais pas le temps [...] mais j'eus tout de suite une entière certitude.
De retour à Caen je vérifiai le résultat à tête reposés pour l'acquit de ma conscience...
Tout ce travail fut parfaitement conscient²⁴.

Alcuni decenni dopo le idee e le suggestioni di Poincaré sono riprese da un altro matematico francese, trasferitosi negli USA, Jacques Hadamard. Le sue riflessioni, i suoi ricordi sono pubblicati nel 1945 con il titolo *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*²⁴ : « È più che dubbio che esista un'attitudine matematica unica e ben definita [...]. Abbiamo tutte le ragioni di pensare che la facoltà matematica debba essere tanto complessa quanto si è constatato lo sia il linguaggio »²⁵.

Una delle questioni che appassiona Hadamard è quella del sogno, dell'attività cosciente ed inconscia in matematica. E come aveva fatto Poincaré, Hadamard ricorda e racconta episodi della sua vita di matematico.

Una famosa questione, quella del sogno matematico, poiché spesso è stato suggerito che la soluzione di problemi che avevano resistito alla ricerca possano apparire in sogno. Esiste un fenomeno indubitabile, della cui assoluta certezza posso garantire io stesso : l'apparire improvviso e immediato di una soluzione nel momento stesso del risveglio improvviso [...]. Svegliato in modo molto brusco, mi apparve subito senza che ci fosse da parte mia la minima riflessione e in una direzione completamente diversa da tutte quelle che avevo cercato di seguire, una soluzione che avevo cercato a lungo. Lo stesso carattere di spontaneità improvvisa era stato indicato anni prima da un altro maestro della scienza contemporanea, Helmholtz [...]. Dopo Helmholtz e Poincaré gli psicologi lo hanno riconosciuto come un tratto comune a tutti i tipi di invenzione. Graham Wallas in *Art of Thought*, suggerì di chiamarlo *illuminazione*, preceduta solitamente da uno stadio di *incubazione*²⁶.

Cita l'esempio di una lettera di Mozart :

²⁴ H. POINCARÉ, *Invention Mathématique*, conferenza tenuta a l'Institut Général Psychologique a Parigi nel 1908, in *Extrait de Bulletin* 3, 8^e année (1908), pp. 7-8.

²⁵ J. HADAMARD, *La psicologia dell'invenzione in campo matematico*, op. cit., p. 4.

²⁶ *Ibid.*, pp. 6-7, e 14.

Come accade che mentre lavoro la mia composizione assuma la forma o lo stile caratteristici di Mozart e di nessun altro ? Proprio come allo stesso modo che il mio naso è largo e curvo, il naso di Mozart e di nessun altro. Non cerco l'originalità, né saprei trovare le parole per descrivere il mio stile. È del tutto naturale che persone che hanno qualcosa di veramente particolare siano diverse le une dalle altre all'esterno come all'interno²⁷.

Il nome di Paul Valery compare spesso, in particolare il testo della conferenza tenuta alla *Société Philosophique Française* : «Ci si dice: *Vedo, e domani vedrò di nuovo*. Un fatto si produce, una sensibilità speciale ; presto si andrà nella camera oscura, e si vedrà l'immagine. Non posso garantirvi che questo processo sia stato ben descritto, perché è estremamente difficile da descrivere »²⁸.

Hadamard aggiunge : « Contrariamente al progresso nei risultati, un atto del genere non deve nulla alla logica o alla ragione. L'atto di scoperta è un incidente »²⁹.

7. Inconscio e scoperta

È ovvio che l'invenzione o scoperta, in matematica come in altri campi, avviene tramite la combinazione di idee. Ora, il numero di queste combinazioni è altissimo, la maggior parte delle quali non sono di nessun interesse mentre pochissime risultano utili. Quali sono quelle che vengono percepite dalla nostra mente, intendo la nostra mente cosciente ? Solo quelle utili, o, in via eccezionale, alcune che potrebbero in futuro essere utili.

Non si può evitare che questa prima operazione abbia luogo, sino ad un certo punto, a caso... ma si vede come l'intervento del caso abbia luogo nell'inconscio : la maggior parte di queste combinazioni - più esattamente quelle inutili - ci rimangono sconosciute.

Inventare è scegliere.

Vediamo quanto meravigliosamente il matematico ed il poeta (si veda il brano di Hardy già citato : Cf. nota 10) siano d'accordo sul punto di vista fondamentale per cui l'invenzione consiste in una scelta.

Come può essere fatta questa scelta ?³⁰

²⁷ *Ibid.*, pp. 14-15.

²⁸ *Ibid.*, p. 15.

²⁹ *Ibid.*, pp. 16-17. Hadamard cita il biologo Jules Henri NICOLLE, *Biologie de l'Invention*, Paris, Alcan, 1932, pp. 5-7.

³⁰ *Ibid.*, p. 28.

E ritorna la questione della bellezza, dell'eleganza, dell'estetica matematica :

I fenomeni inconsci privilegiati, suscettibili di diventare coscienti, sono quelli che, direttamente o indirettamente, colpiscono più profondamente la nostra sensibilità. Ci si può stupire di veder invocare la sensibilità a proposito di dimostrazioni matematiche che sembrerebbero interessare solo l'intelligenza. Sarebbe dimenticare la sensazione della bellezza matematica, dell'armonia dei numeri e delle forme dell'eleganza geometrica. E' una vera sensazione estetica che tutti i veri matematici conoscono. Ed è proprio questione di sensibilità. (Branco di Poincaré citato da Hadamard)³¹.

Ed ecco le conclusioni di Hadamard : «Abbiamo raggiunto una doppia conclusione :

- l'invenzione è scelta
- questa scelta è governata perentoriamente dal senso della bellezza matematica »³².

E Hadamard richiama le conclusioni di Poincaré :

All'inconscio appartiene non solo il difficile compito di costruire la massa delle varie combinazioni di idee, ma anche il compito più delicato ed essenziale, quello di selezionare quelle combinazioni che soddisfano il nostro senso della bellezza e che, di conseguenza, possono essere utili.

Riassumendo, sono tre i generi di lavoro inventivo essenzialmente diversi :

- Attività pienamente conscia
- Illuminazione preceduta da incubazione
- Il processo particolarissimo della prima notte insonne di Poincaré³³.

Precisa Hadamard : «Chiarendo che il processo di illuminazione non è della stessa natura del precedente lavoro conscio. Quest'ultimo è una vera e propria attività, che comporta una tensione più o meno severa della mente, che comporta molteplici tentativi ; il primo invece ha luogo improvvisamente e senza che vi sia stato alcuno sforzo percepibile »³⁴.

³¹ *Ibid.*, p. 29.

³² *Ibidem*.

³³ *Ibid.*, pp. 30-32.

³⁴ *Ibid.*, p. 34.

Inoltre : «Ogniqualvolta viene fatto un errore, l'intuito (insight), quella sensibilità scientifica di cui abbiamo detto, mi avverte che i miei calcoli non hanno quell'aspetto che dovrebbero avere»³⁵.

Riassumendo, i tre stadi dell'invenzione:

Preparazione, incubazione, illuminazione.

Quarto stadio finale: ha luogo nel conscio, è necessario non solo per esprimere i risultati tramite il linguaggio e la scrittura, ma per almeno tre ragioni :

1. Verificare i risultati : il sentimento di certezza assoluta che accompagna l'ispirazione corrisponde in genere alla realtà, ma può anche darsi che ci abbia ingannato.

2. Precisarli : enunciarli in modo preciso. Non accade mai che il lavoro inconscio ci dia il risultato di un qualche calcolo interamente risolto sin dal principio.

I calcoli effettivi che richiedono disciplina, attenzione, volizione e, pertanto, coscienza, dipendono dal secondo periodo del pensiero conscio successivo all'ispirazione.

3. La continuazione del lavoro.

La doppia operazione di verifica e di precisazione del risultato, assume un altro significato quando questo è visto non come la fine della ricerca ma come uno stadio di questa, così che pensiamo di utilizzarlo.

Tale utilizzo non richiede solo che il risultato sia verificato, ma che sia anche precisato.

Poiché sappiamo che il nostro lavoro inconscio, nel mostrarci la via per ottenere il risultato, non se lo offre in forma precisa, può succedere che alcune caratteristiche di quella forma precisa, che non avevamo potuto prevedere appieno, abbiano un'influenza capitale sulla continuazione del pensiero.

Le osservazioni precedenti possono sembrare in certa misura ovvie, se non infantili : ma non è inutile notare che, oltre ai processi mentali dei singoli ricercatori, esse ci aiutano a comprendere anche la struttura della matematica in genere. I progressi di quest'ultima sarebbero stati impossibili non solo senza la verifica dei risultati, ma specialmente senza l'uso sistematico di risultati relais, i quali sono spesso utilizzati intensamente ed esaustivamente, sino alle conseguenze estreme³⁶.

Aggiunge Hadamard : « Alcuni amici mi hanno detto che quando svolgo delle ricerche matematiche ho uno sguardo particolare »³⁷. Ne *L'uomo senza qualità* Robert Musil inserisce un

³⁵ *Ibid.*, p. 45.

³⁶ *Ibid.*, p. 53.

³⁷ *Ibid.*, p. 74.

dialogo su quale deve essere l'aspetto di un matematico. Clarisse risponde : « Non lo so ; non so mica che aspetto debba avere un matematico ! ». Risponde Walter : « Ecco che hai detto una cosa molto giusta ! Un matematico non ha nessunissimo aspetto ! Cioè avrà un'aria intelligente, così in generale, senza nessun contenuto preciso³⁸. Mentre Hardy precisa che sebbene vi sia «la tendenza a esagerare grossolanamente le differenze fra i processi mentali dei matematici e quelli di altre persone, è innegabile che il talento per la matematica sia uno dei doni più specializzati e che i matematici si distinguano in modo particolare per versatilità o abilità generali »³⁹.

Nel 2014 è stato pubblicato su iniziativa di Cédric Villani, direttore dell'*Institut Poincaré* di Parigi, un libro di fotografie dei matematici al lavoro⁴⁰.

Un ultimo esempio, sempre di Hadamard :

Cardano e l'invenzione dei numeri immaginari.

Che cosa è una quantità immaginaria ? Le regole dell'algebra mostrano che il quadrato di ogni numero positivo o negativo è positivo : pertanto parlare della radice quadrata di un numero negativo è una semplice assurdità. Ora, Cardano fa deliberatamente affidamento su quell'assurdità e incomincia a fare calcoli su queste quantità immaginarie.

Qualcuno parlerebbe di follia pura : eppure, l'intero sviluppo dell'algebra e dell'analisi sarebbe impossibile senza quel fondamento - che ovviamente, fu poi stabilito su basi solide e rigorose solo nel XIX secolo. È stato scritto che la via migliore e più breve tra due verità del reale passa sovente per l'immaginario⁴¹.

Prima di provare a scoprire qualcosa o di risolvere un certo problema, ecco presentarsi la domanda :

Cosa dobbiamo cercare di scoprire ?

Che problema dobbiamo risolvere ?

1. Trovare i mezzi per raggiungere una meta data, così che la mente vada dalla meta ai mezzi, dal problema alla soluzione.

³⁸ Robert MUSIL, *L'uomo senza qualità*, trad. di Anita RHO, Torino, Einaudi, 1982, V. 1, p. 35. (ed. orig.) *Der Mann ohne Eigenschaften*, Berlin, Rowohlt, 1930-1943.

³⁹ G. H. HARDY, *Apologia di un matematico*, op. cit., p. 58.

⁴⁰ C. VILLANI, Jean-Philippe UZAN, Vincent MONCORGÉ, *La maison des mathématiques*, Paris, Le Cherche Midi, 2014.

⁴¹ J. HADAMARD, *La psicologia dell'invenzione in campo matematico*, op. cit., pp. 114-115

2. Scoprire un fatto, e nell'immaginare in cosa potrebbe essere utile. Così che, questa volta, la mente procede dal mezzo alla meta ; la risposta ci appare prima della domanda.

Il secondo genere di invenzione è il più diffuso, e lo diventa sempre più con il progressivo avanzare della scienza.

Le applicazioni pratiche si trovano quando non si cercano, e si potrebbe dire che l'intero progresso della civiltà riposi su questo principio.

Raramente accade che ricerche matematiche importanti siano intraprese direttamente in vista di un dato uso pratico : esse sono piuttosto ispirate da quel desiderio che costituisce la motivazione comune di ogni attività scientifica, il desiderio di conoscere e di capire.

Pertanto, dei due generi d'invenzione che abbiamo appena distinto, solo il secondo è praticato abitualmente dai matematici⁴².

Hardy ha scritto a questo proposito che «la migliore matematica non solo è bella ma è anche seria, importante se preferite, ma il termine è molto ambiguo, mentre seria esprime meglio quello che voglio dire»⁴³. Dove seria non vuol dire piena di applicazioni pratiche, al contrario : « La maggior parte della matematica è *inutile*, solo una piccola parte della matematica ha un'utilità pratica e quella piccola parte è relativamente noiosa. La serietà di un teorema matematico non dipende dalle sue applicazioni pratiche [...] ma dalla significatività delle idee matematiche che esso mette in relazione »⁴⁴.

Negli stessi mesi in cui Hardy scriveva queste parole, a pochi chilometri da dove si trovava, a Bletchley Park, un gran numero di scienziati, matematici in particolare, guidati per un periodo da Alan Turing, si dedicavano alla decriptazione del codice nazista *Enigma* per poter individuare le posizioni dei sottomarini tedeschi negli oceani. L'attività era segreto militare, Hardy non poteva sapere quanta matematica *inutile* si producesse in quel periodo. Tra l'altro le idee astratte di Turing, l'idea di quella che è stata chiamata la macchina universale di Turing, permisero di costruire il primo computer alla fine della seconda guerra mondiale. Da anni è caduta la distinzione tra matematica pura ed applicata e ne ha molto beneficiato l'attività di ricerca in tanti settori della matematica. Sono pochissimi i matematici oggi che affermano che la matematica deve essere *inutile*. Nel 1960, il fisico Eugene Wigner pubblicò un articolo intitolato *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences (L'Irragionevole Efficacia*

⁴² *Ibid.*, pp. 117-119.

⁴³ G. H. HARDY, *Apologia di un matematico*, op. cit., pp. 69-70.

⁴⁴ *Ibidem*.

della *Matematica nelle Scienze Naturali*)⁴⁵, in cui osservava che la struttura matematica di una teoria fisica porta spesso a progressi nella teoria stessa e persino verso previsioni empiriche, affermando che non si poteva trattare solo di una coincidenza ma la situazione doveva riflettere una verità profonda che toccava sia la fisica che la matematica.

Continuava Hadamard :

La guida di cui dobbiamo fidarci è quel senso di bellezza scientifica, quella speciale sensibilità estetica, la cui importanza è stata additata da Poincaré.

Un esempio :

Per quale motivo il grande matematico Volterra fu condotto ad operare sulle funzioni allo stesso modo in cui il calcolo infinitesimale aveva operato sui numeri, cioè a considerare una funzione come un elemento continuamente variabile ?

Solamente perché realizzava che si trattava di un modo armonioso di completare l'architettura dell'edificio matematico.

Che i funzionali potessero avere una relazione diretta con la realtà, non poteva essere considerato che come un'assurdità.

I funzionali sembravano una creazione essenzialmente e completamente astratta dei matematici.

La nuova nozione è assolutamente necessaria per la rappresentazione matematica di qualunque fenomeno fisico. Qualunque elemento osservabile viene rappresentato matematicamente da un funzionale⁴⁶.

8. Creatività

Il grande matematico italiano Ennio De Giorgi ha a lungo riflettuto sulla matematica, sulla creatività, sull'estetica. Nell'intervista filmata rilasciata nel 1996, molto autobiografica, così raccontava :

Io penso che all'origine della creatività in tutti i campi ci sia quella che io chiamo la capacità o la disponibilità a sognare ; a immaginare mondi diversi, cose diverse, cercando di combinarle

⁴⁵ Eugene WIGNER, *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, Communications on Pure and Applied Mathematics, V. 13 (1) pp. 1-14.

⁴⁶ J. HADAMARD, *La psicologia dell'invenzione in campo matematico*, op. cit., pp. 122-123.

nella propria immaginazione in vario modo. A questa capacità forse molto simile in tutte le discipline, dalla matematica alla filosofia, dalla teologia all'arte, dalla pittura alla scultura, alla fisica, alla biologia, si unisce poi la capacità di comunicare i propri sogni ; una comunicazione non ambigua richiede la conoscenza del linguaggio, delle regole interne proprie delle diverse discipline. Credo ci sia una capacità di sognare generalmente indistinta, come generalmente indistinto era il sentimento che gli antichi chiamavano filosofia, amore della sapienza, e i diversi modi di comunicare in maniera non ambigua questi sogni, quest'amore per la sapienza, utilizzando linguaggi diversi, schemi diversi che sono propri delle diverse discipline, e delle diverse arti, delle diverse forme del sapere umano. Quello che vorrei apparisse chiaro è l'idea che ho maturato con il passare degli anni, l'idea di un'origine comune di tutte le scienze e le arti che risiede nell'amore della sapienza, della sapienza come base comune di cui le varie discipline sono tante facce. Che dobbiamo distinguere perché la natura umana, il linguaggio umano ha bisogno per essere chiaro e non ambiguo di fissare di volta in volta certi riferimenti locali e specialistici. Nello stesso tempo non dobbiamo chiuderci nella specializzazione, chiuderci nella matematica, chiuderci addirittura in un ramo della matematica se non vogliamo sterilire la nostra creatività⁴⁷.

Immaginazione, sogno, filosofia, arti, creatività, bellezza, estetica. Sono parole che ricorrono spesso quando i matematici riflettono sulla loro attività. Non vi è alcun dubbio che i matematici si ritengono in qualche modo *diversi* da tutte le altre persone, in fondo in fondo superiori per il fatto di occuparsi di un disciplina complicata, basata su una ferrea logica, ed un metodo deduttivo che non consente di sbagliare. Matematica significa essenzialmente dimostrare teoremi, ed anche inventare intere teorie, metodi, algoritmi. È una attività creativa a tutti gli effetti. Poco comprensibile, però. Ecco perché i matematici, anche i grandi matematici, sentono la necessità di cercare di spiegare, di chiarire, anche se in minima parte in che cosa consista la loro attività. Ben consapevoli che è una attività molto complicata, difficile, faticosa cercare di far capire, quando la maggioranza delle persone che non sono scienziati né tanto meno matematici non hanno nessuna voglia di essere coinvolti. In qualche senso il matematico soffre di questa mancanza di riconoscimento, in cui magari tutti sono concordi che la matematica sia una disciplina importante, essenziale, di grande impegno, ma di cui nessuno vuol in realtà capire

⁴⁷ Michele EMMER, *Ennio DE GIORGI*, Video intervista, Unione Matematica Italiana, M. EMMER Prod., DVD, 75 minuti, 1996.

le leggi e le strategie. Ecco allora il raccontare, il raccontarsi, anche per cercare di chiarire a se stessi, ai matematici, che cosa in realtà avviene nel momento in cui appare davanti agli occhi di un ricercatore la rivelazione della avvenuta dimostrazione di un risultato che nessuno ha mai ottenuto prima. Sensazione profonda che può in realtà provare anche un giovanissimo studente che per la prima volta impara a dimostrare un teorema notissimo come quello di Pitagora. Una soddisfazione, una gioia che ha pochi eguali. Da tutto questo nasce il fatto che i matematici sono spesso interessanti e stimolanti anche quando parlano della loro grande passione, perché come diceva Musil nella matematica abbiamo la nuova logica e lo spirito nella sua essenza.

Amava citare spesso una frase De Giorgi :

*There are more things in heaven and earth,
Than are dreamt of in your philosophy.*
William Shakespeare,
Hamlet, Atto I, scena V